



---

|                     |     |      |      |
|---------------------|-----|------|------|
| Cognoms de l'alumne | Nom | curs | grup |
|---------------------|-----|------|------|

---

|         |             |
|---------|-------------|
| Matèria | Professor/a |
|---------|-------------|

- En aquesta guia se t'indiquen els treballs que has de fer i la matèria de la qual t'has d'examinar.
- ES OBLIGATORI QUE PRESENTIS LA GUIA I ELS TREBALLS ABANS DE COMENÇAR L'EXAMEN. **Sense guia o sense treballs, no podràs examinar-te.**
- La puntuació màxima dels exercicis és un 10% de la nota sempre que la qualificació de l'examen sigui igual o superior de 4.



|                      |               |
|----------------------|---------------|
| CRÈDIT/MATÈRIA/MÒDUL | MATEMÀTIQUES  |
| UD/UF                | NOMBRES REALS |

|              |            |
|--------------|------------|
| COGNOMS, NOM |            |
| DATA         | GRUP 1r CS |

NOTA

1.- Representa gràficament i expressa com a intervals aquestes desigualtats: (0,5 per apartat) (1,5p)

- a)  $x \geq -3$
- b)  $x < -2$
- c)  $-7 < x < 4$

2.- Simplifica utilitzant les propietats de les potències: (0,25 per apartat) (0,5p)

a)  $\frac{27^6 \cdot 2^5 \cdot 7^2}{3^4 \cdot 8^3 \cdot 7^{-3}}$

b)  $\frac{a^{-3} \cdot b^{-4} \cdot c^7}{a^8 \cdot b^{-2} \cdot c^{-1}}$

3.- Calcula i simplifica: (0,5 per apartat) (1,5p)

a)  $\sqrt{20} - 3\sqrt{125} + 2\sqrt{45} + \frac{3}{2}\sqrt{80}$

c)  $7\sqrt[3]{81a} - 2\sqrt[3]{3a^4} + \frac{\sqrt[3]{3a}}{5}$

b)  $(2\sqrt{5} - 4\sqrt{3})^2$

4.- Racionalitza i simplifica: (0,5 per apartat) (2p)

a)  $\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{12}}$

c)  $\frac{-7}{3\sqrt{2}} + \frac{5}{4\sqrt{7}}$

b)  $\frac{5}{3(\sqrt{7} - \sqrt{2})}$

d)  $\frac{-3}{5\sqrt[5]{7^3}}$

5.- Racionalitza (1p)

a)  $\frac{-2}{\sqrt[3]{4(5\sqrt{3}-1)}}$

6.- Calcula la base dels següents logaritmes: (0,5 per apartat) (1p)

a)  $\log_3 x = -2$

b)  $\log_x 27 = 3$

7.- Calcula fent servir la definició de logaritmes: (0,5p)

a)  $\log_2 64 + \log_2 \frac{1}{4} - \log_3 9 - \log_2 \sqrt{2}$



8.- Desenvolupa les següents expressions: (1p)

a)  $\log_5 \frac{5\sqrt{A^3}}{B^2}$

b)  $\log_3 \frac{a^2 b^5 c}{d^2}$

9.- Efectua les operacions següents i deixa el resultat amb notació científica: (1p)

a)  $8,75 \cdot 10^2 + 5,45 \cdot 10^3$

b)  $3,62 \cdot 10^4 - 5,85 \cdot 10^{-3}$

c)  $7,3 \cdot 10^4 \cdot 5,25 \cdot 10^{-3}$

d)  $8,3 \cdot 10^{-6} : (5,37 \cdot 10^2)$



| CRÈDIT/MATÈRIA/MÒDUL                     | MATEMÀTIQUES |
|------------------------------------------|--------------|
| UD/UF POLINOMIS, EQUACIONS I INEQUACIONS |              |

|              |            |
|--------------|------------|
| COGNOMS, NOM |            |
| DATA         | GRUP 1r CS |

NOTA

1.- Resol els següents sistemes d'equacions i inequacions: (1 per apartat) (4p)

a) 
$$\begin{cases} x + 7 \geq 3x + 1 \\ x + 1 \geq 2x + 4 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} x - y = 9 \\ x \cdot y = 90 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ y + 3x = 13 \end{cases}$$

d) 
$$\begin{cases} 2x + 3 \geq 3y \\ 4x + y \geq 1 \end{cases}$$

2.- Resol les següents equacions i inequacions: (0,5 per apartat) (3p)

a)  $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$

e)  $\frac{x}{x+2} = \frac{1}{x}$

b)  $x^2 + 4x - 12 > 0$

f)  $\ln 2 + \ln(11 - x^2) = 2\ln(5 - x)$

c)  $\sqrt{x^2 + 3x - 6} = 2x - 6$

d)  $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 7$

3.- Divideix els següents termes: (0,5p)

$6x^5 - x^4 - 8x^3 + 15x^2 - 8x$  per  $2x^2 - 3x + 2$

4.- Divideix per Ruffini i digues el quocient i el residu: (0,5p)

$(2x^3 + 9x^2 + 11x + 7) : (x + 3)$

5.- Quant ha de valer  $q$  per a que la divisió sigui exacta? (0,5p)

$x^3 - 2x^2 + qx + 5 : x + 1$

6.- Descompon en factors el següent polinomi i digues quines són les seves arrels: (0,5p)

$p(x) = -2x^3 + 2x^2 + 10x + 6$

7.- Problemes: Escull-ne un dels 2 problemes (1p)

- a) Un cinema té el mateix nombre de files que de butaques per fila. El propietari decideix remodelar-lo i treure una butaca per fila i tres files. Després de la remodelació, hi ha 323 butaques.

i. Quantes files tenia el cinema abans del canvi?

ii. Quantes butaques hi ha ara a cada fila?

- b) Un inversor, que disposa de 28 000 €, col·loca part del capital en un banc al 8% i la resta en un altre banc al 6%. Si la primera part li produeix anualment 200 € més que la segona, quant va col·locar en cada banc?

|                      |              |
|----------------------|--------------|
| CRÈDIT/MATÈRIA/MÒDUL | MATEMÀTIQUES |
| UD/UF                | FUNCIONS     |

|              |      |
|--------------|------|
| COGNOMS, NOM | NOTA |
| DATA         |      |
| GRUP 1r CS   |      |

1.- Donades les funcions  $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$   $g(x) = \sqrt{3x+9}$   $h(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \leq -2 \\ x^2-3 & 0 < x \leq 3 \\ \sqrt{x-2} & 3 < x \end{cases}$

$i(x) = \log_3(2-x)$ . Calculeu:

- a) Els dominis de  $f(x)$ , de  $g(x)$ ,  $h(x)$  i  $i(x)$ . (1p)
- b) Si existeix,  $f^{-1}(x)$ . (1,5p)
- c)  $g \circ f(x)$  (0,5p)
- d)  $f \circ g(x)$  (0,5p)
- e)  $f \circ f(x)$  (0,5p)
- f)  $g \circ f(-1)$  (0,5p)

2.- Representa gràficament aquestes funcions: (0,5 per apartat) (1,5p)

- a)  $y = -2x + 4$ ;  $Dom(y) = (1,4]$
- b)  $\log_2 x$
- c) La funció  $h(x)$  de l'apartat anterior

3.- Representa gràficament i escriu els intervals de creixement/decreixement i identifica els màxims/mínims: (0,5 representar-la) (1,5p)

a)  $y = -x^2 + 2x - 1$

4.- Representa i defineix com a funcions “a trossos”: (0,5 per apartat) (1p)

$y = |x^2 + 6x|$

5.- Problemes: (1,5p)

- a) Una ONG ha estimat que el nombre de persones ingressades als hospitals després d'un tsunami segueix aproximadament la fórmula:

$$P(t) = 1 + \frac{110}{t^2 + 10} \quad t \in (0, 30)$$

En que  $P$  és el nombre de persones hospitalitzades, en milers, i  $t$  és el nombre de dies transcorreguts des del tsunami.

- i. Quantes persones hi haurà hospitalitzades el primer dia?
- ii. Quantes n'hi haurà al cap de 3 setmanes?
- iii. Si la capacitat hospitalària d'una illa de l'àrea afectada és de 2000 llits, fins a quin dia va estar desbordada la capacitat?



| CRÈDIT/MATÈRIA/MÒDUL       | MATEMÀTIQUES |
|----------------------------|--------------|
| UD/UF LÍMITS I CONTINUITAT |              |

|              |            |
|--------------|------------|
| COGNOMS, NOM |            |
| DATA         | GRUP 1r CS |

NOTA

1.- Calculeu els següents límits: (0,5 per apartat) (3,5p)

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 - 4}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^4 + 1}{x^3}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^3 + x^2 - 5x - 2}$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{-4x^5 - 2}{3x^5 + 9} \right)$

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^2 - 5}{-3x^3 + 1}$

f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x - 5}{x} \right)^{5-3x}$

g)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{x+2}{x^2-1} \right)$

2.- Calcula el següent límit: (1p)

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{8x-5}{8x+3} \right)^{5+2x}$

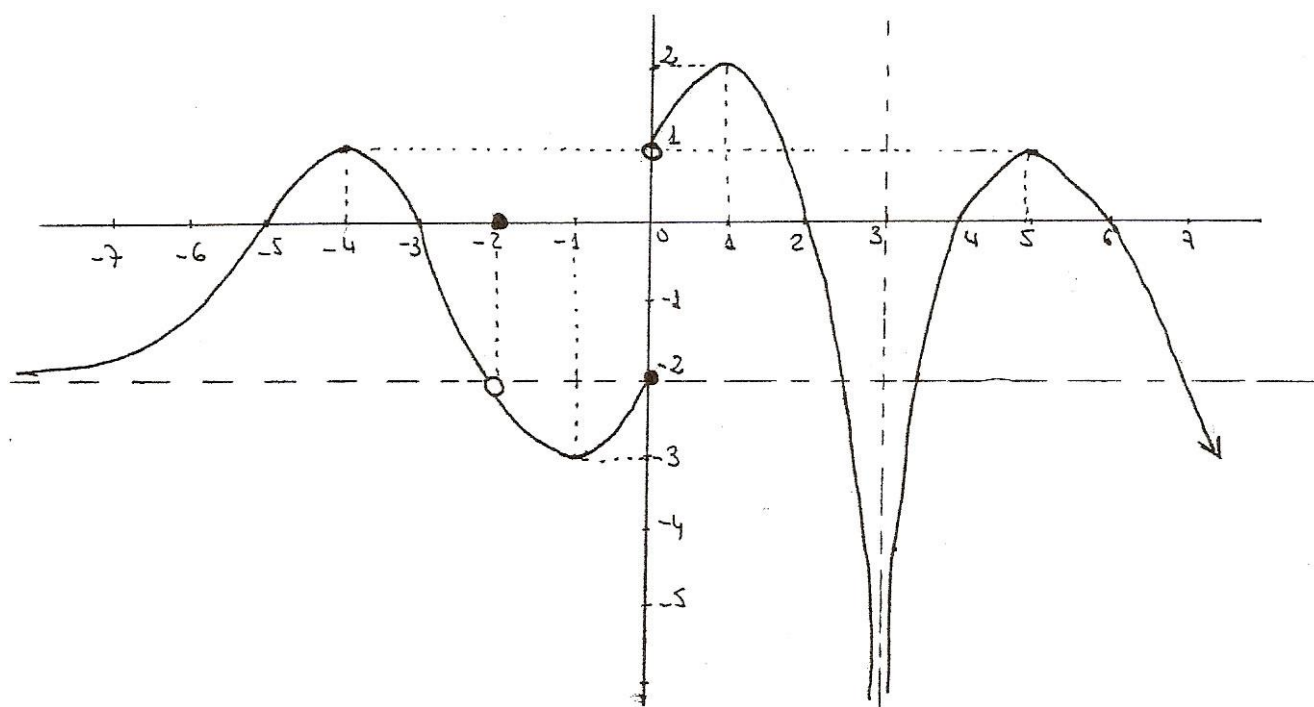
3.- Donada la funció  $f(x) = \begin{cases} 6 - \frac{x}{2} & x < 2 \\ x^2 + kx & x \geq 2 \end{cases}$

Troba el valor de k per a que la funció sigui contínua en x=2. (1p)

4.- Estudia la continuïtat de la següent funció: (1,5p)

$$\frac{x+1}{x^2-1}$$

5.- Donada la següent gràfica, calculeu: (3p)



- a) Punts de discontinuïtat i de quin tipus és i per què (els càlculs que corresponguin). (1,5p)  
 b) Els límits següents: (1,5p)

|                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ | $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ |
| $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$     | $f(-2)$                             |
| $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$     | $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$       |
| $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$      | $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$       |
| $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$      | $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$       |
| $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$      | $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$       |

Determineu la derivada de les següents funcions:

1.  $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 6x - 1$

15.  $f(x) = x\sqrt{x}$

2.  $f(x) = x^7 - \frac{2}{3}x^5 + \frac{4}{3}x^3 - 7x^2 + 1$

16.  $f(x) = x - 2 - \frac{3}{x} + \frac{6}{x^3}$

3.  $f(x) = (3x - 2)(4x^2 + 2x)$

17.  $f(x) = 3e^x + x^2 - 1$

4.  $f(x) = (x^2 - 5x)x$

18.  $f(x) = \frac{1-x}{x^2-4}$

5.  $f(x) = (7x^4 - 3x^3)(x - 1)$

19.  $f(x) = (x - 1)\ln x$

6.  $f(x) = x^2e^x$

20.  $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2x}$

7.  $f(x) = \frac{3x-1}{2x-3}$

21.  $y = \frac{x^2-5x+1}{x^2+3}$

8.  $f(x) = \frac{3x-1}{x-1}$

22.  $y = \frac{\ln x}{x}$

9.  $f(x) = \frac{3x+1}{2x+3}$

23.  $y = \frac{3e^x}{2-e^x}$

10.  $f(x) = x^2 - \frac{x}{3} + 1$

24.  $f(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{5}{x}$

11.  $f(x) = \sqrt{x} + 2x - 3$

25.  $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + 5x$

12.  $f(x) = x^2e^x$

26.  $f(x) = 1 + 2x - \ln x$

13.  $f(x) = \frac{3x+2}{x^2-1}$

27.  $f(x) = \frac{x}{(2x+1)}$

14.  $f(x) = x \log_2 x + 5$

28.  $f(x) = 1 + x - 3^x$

## DERIVADES

Calculeu la derivada de les funcions següents:

1)  $y = e^{2x^2-1}$

2)  $y = 7^{x^3+2x}$

3)  $y = \sin 5x$

4)  $y = \cos(x^2 + 1)$

5)  $y = \operatorname{tg}(2x^3)$

6)  $y = e^{\sin 3x}$

7)  $y = \ln(x^2 + 1)$

8)  $y = \ln(x + \cos x)$

9)  $y = \ln(\sin x)$

10)  $y = \ln(\cos 7x)$

11)  $y = x \cdot \operatorname{arctg} 2x$

12)  $y = \arcsin(2x^3 + 3)$

13)  $y = 5e^{2x} + \cos 3x$

14)  $y = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

15)  $y = e^{\sqrt{3x}}$

16)  $y = \frac{x + \ln x}{x^2}$

17)  $y = (x^3 - 1)^4$

18)  $y = \sin^2 x$

19)  $y = \sqrt{x^2 - 2x + 7}$

20)  $y = \sqrt{\arcsin(7x^2)}$

21)  $y = \log_5(2x + 3)$

22)  $y = \sqrt[5]{2x^2 - 3x - 1}$

23)  $y = e^{2x+1} \cdot \sqrt{x+1}$

24)  $y = \cos \sqrt{x^2 + 8}$

25)  $y = 4^{\operatorname{tg} 2x}$

26)  $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

27)  $y = 3^{x \cdot \operatorname{arctg} x}$

28)  $y = \cos^3 2x$

29)  $y = \cos^4 x - \cos x^4 + \cos 4x$

30)  $y = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x}}$

31)  $y = \sin \pi$

32)  $y = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

33)  $y = \frac{5}{x} + \arccos 5x$

34)  $y = \frac{x^4}{4} + \frac{3}{2}x^2 - x - 2 - \frac{3}{x} + \frac{6}{x^3}$

35)  $y = \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$

**Càlcul de derivades-2**

Calculeu les derivades de les funcions següents i simplifiqueu els resultats:

$$36) \quad y = \sqrt{1-2x^2}$$

$$37) \quad y = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$$

$$38) \quad y = (2x+1)^5$$

$$39) \quad y = (1-x-x^2)^4$$

$$40) \quad y = \frac{1}{(1-x^3)^4}$$

$$41) \quad y = \ln \sqrt{1+x}$$

$$42) \quad y = \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$$

$$43) \quad y = \ln \left( \frac{1-x^2}{1+x^2} \right)$$

$$44) \quad y = \ln(e^{2x} + e^x)$$

$$45) \quad y = \sin x^3$$

$$46) \quad y = \sin^3 x$$

$$47) \quad y = e^x \cdot \cos 2x$$

$$48) \quad y = (x+1)^{2x+3}$$

$$49) \quad y = \operatorname{arctg} \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$$

$$50) \quad y = 7^{\sqrt{x} \cot gx}$$

$$51) \quad y = x - 2\sqrt{x} + 2 \ln(1+\sqrt{x})$$

$$52) \quad y = \arcsin(1-x)$$

$$53) \quad y = (2 - \operatorname{tg} x)^{x^2}$$

$$54) \quad y = \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$$

$$55) \quad y = \log_5 \sqrt[3]{2x-1}$$

$$56) \quad y = e^{\sin^2 x}$$

$$57) \quad y = \arccos \sqrt{1-4x^2}$$

$$58) \quad y = \sqrt[3]{x^4 - \sin 5x}$$

$$59) \quad y = \operatorname{arctg} \left( \frac{2x}{1-x^2} \right)$$

$$60) \quad y = \frac{\sqrt{2}}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{6} \ln \left( \frac{x-1}{x+1} \right)$$

**EXERCICIS**

1. (2017) Considerem una funció  $f(x)$  tal que la seva primera derivada és  $f'(x) = x^2 + bx - 3$ , en què  $b$  és un paràmetre real.
  - a. Determineu el valor de  $b$  perquè  $f(x)$  tingui un extrem relatiu en  $x=-3$  i raoneu si es tracta d'un màxim o d'un mínim.
  - b. Per a  $b=-8$ , trobeu l'equació de la recta tangent a  $f(x)$  en el punt  $(0, 2)$ .
2. (2017) Un gimnàs cobra una quota de 42 euros mensuals i té 2.000 usuaris. Un estudi de mercat afirma que per cada euro que s'apuja (o s'abaixa) la quota es perden (o es guanyen) 20 usuaris.
  - a. Expresseu el nombre d'usuaris del gimnàs en funció de la quota, tenint en compte que la relació entre les dues variables és lineal. Per a quin valor de la quota el gimnàs es quedaria sense usuaris?
  - b. Determineu en quin preu cal fixar la quota per a obtenir un benefici mensual màxim. Quin seria aquest benefici i quants usuaris tindria el gimnàs en aquest cas?
3. (2017) El preu en euros d'una pedra preciosa és cinc vegades el quadrat del seu pes en grams. Si tenim una pedra preciosa de 8 grams i ens plantegem partir-la en dos trossos:
  - a. Quin pes ha de tenir cadascun dels trossos perquè el conjunt valgui el mínim possible?
  - b. Quin és el preu mínim i el preu màxim que pot valer aquest conjunt?
4. (2017) Les pèrdues o els beneficis d'una empresa vénen donats per la funció  $f(t) = \frac{3t-6}{t+2}$ , en què  $f(t)$  s'expressa en centenars de milers d'euros, un cop transcorreguts  $t$  anys des de l'inici del 2010.
  - a. Feu un esbós de la gràfica de la funció  $f(t)$  per a  $t > 0$ , calculant els intervals de creixement, els talls amb els eixos i les asímptotes. [1 punt]

- b. A l'inici de l'any 2010, quants euros perdia o guanyava l'empresa? Quins anys va tenir pèrdues l'empresa i a partir de quin any en va deixar de tenir? [0,5 punts]
- c. A partir de quin any els guanys de l'empresa van ser més grans o iguals a un centenar de milers d'euros? Es poden superar els tres centenars de milers d'euros de beneficis? Raoneu les respostes. [0,5 punts]
5. (2017) Considereu la funció  $f(x) = -x^2 + bx + c$ , amb  $b$  i  $c$  nombres reals.
- a. Trobeu  $b$  i  $c$  de manera que la gràfica de la funció passi pel punt  $(-1,0)$  i tingui un extrem local en el punt d'abscissa  $x = 3$ . Raoneu de quin tipus d'extrem relatiu es tracta.
- b. Per al cas  $b = 3$  i  $c = 2$ , trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica que és paral·lela a la recta  $y = 5x - 2$ .
6. (2017) Des d'una barca es dispara una bengala de salvament marítim que s'apaga al cap de 4 minuts. En aquest interval de temps, es comprova que la intensitat lumínica de la bengala en funció del temps, mesurada en percentatges del 0 % al 100 %, queda perfectament descrita per l'expressió  $L(t) = 25 \cdot t \cdot (4 - t)$ , en què el temps  $t$  varia entre 0 i 4 minuts.
- a. Calculeu per a quin valor de  $t$  el percentatge d'intensitat lumínica serà màxim.
- b. Si des de la costa la bengala només és visible quan la seva intensitat lumínica és superior al 75 %, quin és l'interval de temps en què serà visible des de la costa i, per tant, serà més factible el salvament?
7. (2017) D'una funció  $y = f(x)$  sabem que la seva derivada és  $f'(x) = x^3 - 4x$ .
- a. Determineu els intervals de creixement i de decreixement de la funció  $y = f(x)$ .
- b. Determineu les abscisses dels seus extrems relatius i classifiqueu-los.
8. (2016) Sabem que la funció derivada  $f'$  d'una funció  $f$ , polinòmica de tercer grau, talla l'eix de les abscisses en els punts  $x = -1$  i  $x = 2$ .
- a. Justifiqueu si és possible que  $f'$  talli també l'eix de les abscisses en un punt diferent dels dos esmentats.

- b. Si ens diuen que  $f'(1)=2$ , indiqueu i classifiqueu els màxims i els mínims de la funció  $f$ .

9. (2016) Sigui la funció  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

- a. Estudieu en quins intervals  $f$  creix i en quins intervals decreix. Determineu i classifiqueu, si n'hi ha, els màxims i els mínims de  $f$ .
- b. Escriviu l'equació de la recta tangent a la gràfica de  $f$  en el punt d'abscissa  $x=2$ .

10. (2016) Considereu la funció  $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$

- a. Estudieu-ne el creixement i, si en té, determineu-ne i classifiqueu-ne els extrems relatius.
- b. Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de  $f$  en el punt d'abscissa  $x=1$ .

11. (2016) Una fàbrica de mobles de cuina ven 1.000 unitats mensuals d'un model d'armari a 200 € per unitat. Per tal de reduir-ne l'estoc, fa una oferta als compradors i estima que, per cada euro de reducció del preu, les vendes mensuals del producte s'incrementaran en 100 unitats.

- a. Quantes unitats caldrà vendre per a obtenir el màxim d'ingressos mensuals? [1,5 punts]
- b. A quant pujaran aquests ingressos? [0,5 punts]

12. (2016) Considereu la funció  $f(x) = \frac{x+1}{x^2 + 3}$ .

- a. Determineu els punts en què la funció  $f$  talla cadascun dels eixos. Determineu també els intervals on la funció  $f$  és positiva.
- b. Determineu els punts en què la recta tangent a la gràfica de  $f$  és horitzontal.

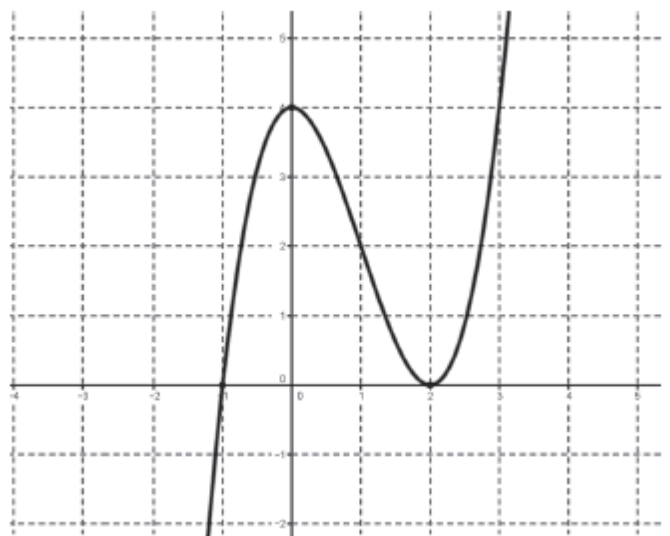
13. (2016) Una empresa ven un producte a un preu de  $p$  euros. El nombre d'unitats venudes depèn del preu que fixem segons la funció

$$V(p) = \frac{30p + 10}{p}$$

- a. Demostreu que, en augmentar els preus, les vendes disminueixen.

- b. És possible que l'empresa vengui 20 unitats del producte? Si el preu augmenta indefinidament, què passarà amb les vendes?
14. (2015) S'ha observat que el nombre d'entrades que es venen al cinema d'un poble està lligat al sou mitjà  $x$  de la població, expressat en milers d'euros, segons la funció  $N(x) = \frac{50x}{x^2 + 1}$
- a. Determineu el sou mitjà de la població que correspon a la màxima venda d'entrades i justifiqueu la resposta.
- b. Si suposem que els sous de la població creixen indefinidament, com incidiria aquest fet en la venda d'entrades del cinema?
15. (2015) Determineu els valors de  $a$ ,  $b$  i  $c$  que fan que la funció  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  passi pel punt  $(0,4)$  i tingui extrems relatius en els punts d'abscissa  $x=1$  i  $x=3$ . Classifiqueu aquests extrems.
16. (2015) Un hotel cobra 45 € per habitació i nit. Per aquest preu, té ocupades 165 habitacions cada nit. S'ha fet un estudi a partir del qual s'ha deduït que, per cada euro que s'apugi el preu de l'habitació, se n'ocuparà una menys cada nit.
- a. Si  $x$  és la quantitat que s'apuja el preu de l'habitació per sobre dels 45 € inicials, determineu la funció que dóna els ingressos diaris de l'hotel segons el valor de  $x$ . Indiqueu també els ingressos màxims que pot obtenir l'hotel.
- b. Indiqueu entre quins preus obtindrà ingressos l'hotel.
17. (2015) La gràfica adjunta mostra la funció  $f'$ , derivada d'una funció  $f$ .

- a. Determineu en quins intervals la funció  $f$  és creixent i en quins intervals és decreixent. Si n'hi ha, classifiqueu els extrems de la funció  $f$ .
- b. Indiqueu per a quins valors de  $x$  la recta tangent a  $f$  és horitzontal.



18. (2015) El preu, expressat en milers d'euros, del robí africà és el doble del quadrat del seu pes en grams, mentre que el preu del robí tailandès és quatre vegades el cub del seu pes en grams. Ens han enviat un paquet amb dos robins, un de cada classe, que en total pesen 2 grams.
- Si els dos robins pesessin el mateix, quin preu hauríem de pagar?
  - Quant ha de pesar cada robí perquè el preu del paquet sigui mínim? Quin és aquest preu mínim?
19. (2015) La funció derivada d'una funció  $f$  és  $f'(x) = (x - 5)e^{-2x}$ .
- Si en té, determineu i classifiqueu els extrems de la funció  $f$ .
  - Sabem que la gràfica de  $f$  passa per  $P(0, 2)$ . Calculeu l'equació de la recta tangent a  $f$  en el punt  $P$ .
20. (2015) La funció derivada d'una funció  $f$  és  $f'(x) = e^{-2x}(x - x^2)$ .
- Estudieu el creixement i el decreixement de la funció  $f$ .
  - Si la funció  $f$  té extrems relatius, indiqueu-ne les abscisses i classifiqueu-los.
21. (2015) Considereu la funció  $f(x) = \frac{2x + 2}{x^2 - x + 2}$
- Escriviu l'equació de la recta tangent a la gràfica de  $f$  en el punt de tall amb l'eix de les ordenades.
  - Determineu els punts de la corba en què la recta tangent és horitzontal.
22. (2015) Un arbre té un volum de  $30 \text{ m}^3$  i, per la qualitat de la seva fusta, es ven a 50 € per metre cúbic. Cada any l'arbre augmenta el volum en  $5 \text{ m}^3$ . Alhora, la qualitat de la fusta de l'arbre disminueix, i també el preu, que cada any és un euro per metre cúbic més barat. D'aquí a quants anys aconseguirem el màxim d'ingressos per la venda de la fusta de l'arbre? Quins seran aquests ingressos?
23. (2014) La gràfica de la derivada  $f'$  de la funció  $f$  és una paràbola que talla l'eix d'abscisses en els punts  $(5, 0)$  i  $(1, 0)$ , i té el vèrtex en el punt  $(3, -4)$ .
- Expliqueu raonadament en quins intervals la funció  $f$  és creixent i en quins intervals és decreixent. Indiqueu-ne els extrems relatius i classifiqueu-los.

- b. Sabem que  $f(3) = 2$ . Determineu l'equació de la recta tangent a la funció  $f$  en el punt  $(3, 2)$ .
24. (2014) Una cadena de televisió decideix emetre un nou programa en la franja horària de les 17.00 h a les 21.00 h. El percentatge d'audiència  $P$  de la primera emissió en funció del temps  $t$ , mesurat en hores, és definit per la funció  $P(t) = \frac{1}{5}(-t^3 + 49t^2 - 760t + 3690)$   $17 \leq t \leq 21$ .
- Els directius de la cadena acorden que el programa se seguirà emetent si en algun moment s'aconsegueix un percentatge d'audiència superior al 20 %.
- a. Expliqueu raonadament en quins intervals de temps l'audiència del programa va augmentar i en quins intervals va disminuir.
- b. En vista dels resultats, se seguirà emetent el programa? Justifiqueu la resposta.
25. (2014) Sigui la funció  $f(x) = x \cdot e^x$ .
- a. Si la funció  $f$  té extrems relatius, determineu-los i classifiqueu-los.
- b. Calculeu la recta tangent a la gràfica de  $f$  en el punt d'abscissa  $x = 0$ .
26. (2014) Els beneficis diaris, en centenars d'euros, d'un taller de bicicletes són definits per la funció  $f(x) = -20x^2 + 50x - 20$ , on  $x$  són els centenars de bicicletes venudes. El taller només té capacitat per a fabricar 200 bicicletes al dia.
- a. Calculeu el benefici màxim diari que pot obtenir el taller.
- b. Determineu el nombre mínim de bicicletes que ha de fabricar per a no tenir pèrdues.
27. (2014) Considereu la funció  $f(x) = \frac{3x - 4}{3x - 5}$ .
- a. Indiqueu-ne el domini i els punts on la gràfica de la funció  $f$  talla l'eix d'abscisses.
- b. Determineu-ne, si en té, les asímptotes horitzontals i verticals.
28. (2014) S'han corregit unes quantes proves de selectivitat i s'han puntuat amb notes entre 0 i 10. El nombre de persones que han obtingut una determinada qualificació  $x$  és definit per la funció  $N(x) = 250 - (2x - 9)^2$ .

- a. Quantes persones han tret un 10 en aquesta prova? Quantes persones han tret un 6?
- b. Quina és la nota que han tret més persones? Quantes persones han tret aquesta nota?
29. (2014) La funció derivada d'una funció  $f$  és  $f'(x) = e^{-x} \cdot (x - x^2)$ .
- a. Estudieu el creixement i el decreixement de la funció  $f$ .
- b. Si la funció  $f$  té extrems relatius, indiqueu-ne les abscisses i classifiqueu-los.
30. (2014) Considereu la funció  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ .
- a. Determineu-ne, si en té, les asímptotes horitzontals i verticals.
- b. Justifiqueu que és decreixent en tot el domini de  $f$ .
31. (2013) Un equip científic ha estudiat l'evolució de la població d'una petita illa de la Polinèsia. Com a conclusió, ha determinat que, per tal d'obtenir una bona estimació de la població, cal fer servir l'expressió  $P(t) = 400 + 18t - 6t^{\frac{3}{2}}$ , on  $t$  indica els anys transcorreguts des del principi de l'estudi.
- a. Determineu la població de l'illa quan va començar l'estudi, i al cap d'un any. Quina ha estat la taxa de creixement en aquest període?
- b. Al cap de quants anys després del començament de l'experiment va deixar de créixer la població de l'illa? Quin va ser el nombre màxim d'habitants?
32. (2013) En un hort hi ha plantades 50 pomeres. Cada arbre produeix 800 pomes. Per cada arbre addicional que hi plantem, la producció de cada arbre es redueix en 10 pomes. Quants arbres més ens cal plantar per a obtenir la producció més alta possible? Quina és aquesta producció?
33. (2013) Els beneficis d'una companyia de transport de viatgers són donats per la funció  $B(x) = ax^2 + bx + c$ , on  $x$  és el preu que la companyia cobra per cada viatge. Sabem que si cobren 40 € per viatge, els beneficis són 19.000 €. A més, si augmentem el preu un 25 %, el benefici que s'obté és el màxim, 20.000 €. Tenint en compte aquestes dades, determineu els valor de  $a$ ,  $b$  i  $c$ .

34. (2013) Determineu els valors dels paràmetres  $a$ ,  $b$  i  $c$  que fan que les corbes d'equació  $f(x) = x^3 + ax + b$  i  $g(x) = x^3 + cx^2 - 2$  tinguin la mateixa recta tangent en el punt  $(1, 1)$ .
35. (2013) Donades les funcions  $f(x) = x^3 + 5x^2 + (3 + k)x$  i  $g(x) = x^2 + kx$ .
- Determineu les abscisses dels punts de tall de les dues corbes.
  - Determineu  $k$  perquè la paràbola donada per la funció  $g$  tingui el vèrtex en el punt d'abscissa  $x = 2$ , i determineu-ne l'ordenada.
36. (2013) Una empresa agrícola ha recollit un total de 40 tones de fruita que produeixen un benefici de 0,80 €/kg. Cada setmana que passa es produeix una pèrdua de 400 kg de fruita, però el benefici augmenta en un cèntim per cada kilogram.
- Quin benefici s'obté si es ven la fruita al cap de nou setmanes? Quin percentatge de fruita s'ha hagut de llençar?
  - Quina setmana de venda serà la que obté un benefici màxim?
37. (2013) Segons uns estudis de laboratori, l'evolució de la població en un cultiu de bacteris al llarg del temps segueix la funció  $f(t) = 30 \cdot (1 - e^{-t}) + 10$ , on  $t$  són els dies que han transcorregut des de l'inici de l'experiment, i  $f(t)$  és la població, en milions de bacteris.
- Quina població hi ha en el moment de començar l'experiment? Justifiqueu si en algun moment hi arribarà a haver 40 milions de bacteris.
  - Hi haurà algun moment en què la població sigui màxima? Justifiqueu la resposta.
38. (2013) La funció derivada d'una funció  $f$  és  $f'(x) = e^{-x} \cdot (2x^2 - 3x)$ .
- Estudieu el creixement i el decreixement de la funció  $f$ .
  - Si la funció  $f$  té extrems relatius, indiqueu-ne les abscisses i classifiqueu-los.
39. (2013) La demanda d'energia elèctrica d'una ciutat, comptada a partir de la mitjanit i fins a les vuit del matí, és donada per la funció  $f(t) = \frac{t^2 - 6t + 12}{6}$ , on  $t$  s'expressa en hores (h) i  $f(t)$ , en milions de kilowatts hora (kW h).

- a. A quina hora el consum coincideix amb el de la mitjanit, i quin és aquest consum?
- b. A quina hora es donarà el mínim consum? Justifiqueu que, efectivament, es tracta d'un mínim.
40. (2012) Sobre la funció  $f(x) = \frac{a}{x^2 + bx + c}$  disposem de les dades següents:
- les seves asímptotes verticals són  $x = -3$  i  $x=1$ ;
  - la seva gràfica passa pel punt  $(0, -4)$ .
- a. Determineu la fórmula de la funció i feu un dibuix aproximat de la gràfica corresponent.
- b. En el cas  $a=1$ ,  $b = -2$  i  $c = -1$ , determineu i classifiqueu, si existeixen, els extrems relatius de la funció.
41. (2012) Un triangle té els vèrtexs  $O(0, 0)$ ,  $A(6, 0)$  i  $B(0, 3)$ .
- a. Dibuixeu-lo i escriviu l'equació de la recta que conté el segment  $AB$ .
- b. Considerem un punt  $P$  situat sobre el segment  $AB$ , i dibuixem el rectangle que té per diagonal  $OP$  i dos costats sobre els eixos de coordenades. Determineu les coordenades de  $P$  que fan màxima l'àrea del rectangle.
42. (2012) Sigui  $f$  una funció polinòmica de grau 3, amb un màxim a  $(0, 0)$  i un mínim a  $(2, -4)$ .
- a. Feu una gràfica aproximada de  $f$ .
- b. Determineu la fórmula de la funció.
43. (2012) La població de bacteris en una mostra evoluciona segons la funció  $f(t) = -t^2 + 4t + 12$ , on  $t$  correspon al nombre de setmanes des de l'inici de l'experiment, i  $f(t)$  és el nombre d'individus que formen la mostra, en milions d'unitats.
- a. Quantes setmanes han de passar fins a la desaparició de la població?
- b. Quin serà el nombre màxim d'individus de la mostra, i al cap de quantes setmanes s'aconseguirà?

44. (2012) Donada la funció  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ , determineu els valors dels tres paràmetres sabent que la gràfica de la funció passa pel punt (1, 18) i que té extrems relatius per a  $x = -2$  i  $x = 4$ .

45. (2012) Considerem la funció  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$ .

- Escriviu la fórmula de la funció que a cada nombre real,  $x$ , li fa correspondre el pendent de la recta tangent a  $f$  en el punt d'abscissa  $x$ .
- Determineu l'equació de la recta tangent a la gràfica de  $f$  en el punt d'abscissa  $x = -1$ .

46. (2012) Considerem les funcions  $f(x) = (x - a)^3$  i  $g(x) = -x^2 + bx + c$ .

- Determineu els valors dels paràmetres que fan que les dues corbes tinguin la mateixa tangent en el punt (2, 1). (1,5p)
- En el cas  $a = 1$ , feu una gràfica aproximada de la funció  $f$ . (0,5p)

47. (2012) Considerem la funció  $f(x) = \frac{12}{x}$ .

- Indiqueu-ne el domini i estudeu-ne el creixement.
- Calculeu les equacions de les rectes tangents a la gràfica de  $f$  que són paral·leles a la recta  $y + 3x = 2$ .

48. (2012) Disposem de  $48 \text{ cm}^2$  de material per a fabricar una capsa de base quadrada, sense tapa. Calculeu les dimensions de la capsa de volum més gran que podem construir en aquestes condicions. Quin serà el volum de la capsa?

49. (2011) Considereu la funció següent:  $f(x) = \frac{2x^2}{ax + 1}$

- Determineu el valor de  $a$  que fa que la funció  $f$  tingui un extrem en el punt  $x = 1$ , i indiqueu si es tracta d'un màxim o d'un mínim.
- Per a  $a = 3$ , indiqueu les asímptotes horitzontals i verticals de la funció  $f$ .

50. (2011) Una empresa que fabrica bicicletes ven la totalitat de la producció. Anomenem  $x$  el nombre de bicicletes que fabrica mensualment. Els costos mensuals de producció, en euros, segueixen la funció  $C(x) = 180x + 12000$ .

La venda de les bicicletes li reporta uns ingressos que segueixen la funció

$$I(x) = 500x - \frac{1}{2}x^2. \text{ Els beneficis de l'empresa són, lògicament, la diferència}$$

entre ingressos i costos.

- En quin interval cal situar la producció per a no perdre diners?
- Quantes bicicletes ha de produir mensualment l'empresa per a obtenir el benefici màxim? En aquest cas, quant guanya per cada bicicleta?

51. (2011) Considereu la funció  $f(x) = x - e^{-3x}$ .

- Indiqueu-ne el domini, i demostreu que  $f$  és estrictament creixent en tot el domini.
- Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de  $f$  en el punt d'abscissa  $x=0$ .

52. (2011) Considereu la funció  $f(x) = x - \ln(x)$ .

- Indiqueu-ne el domini. Determineu l'asíptota vertical de la funció  $f$ .
- Determineu els intervals en què la funció  $f$  és creixent i els intervals en què és decreixent, i classifiqueu-ne els extrems possibles.

53. (2011) Considereu la funció  $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4, & x < 0 \\ \frac{1}{x-3}, & x \geq 0 \end{cases}$ .

- Feu-ne una representació gràfica aproximada. Justifiqueu per a quins valors de  $x$  la funció és discontinua.
- Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de  $f$  en el punt d'abscissa  $x=4$ .

54. (2011) Un bosc té una massa forestal de  $40000\text{m}^3$  de fusta. Es calcula que la pluja àcida i els incendis provoquen una disminució del 6% anual de l'esmentada massa forestal, que es pot expressar en termes de la funció  $F(t) = 40000 \cdot 0,94^t$ , en què  $F(t)$  és la massa forestal que queda passats  $t$  anys.

- Justifiqueu que la funció  $F$  és estrictament decreixent.
- D'aquí a quants anys la massa forestal s'haurà reduït a la meitat?

55. (2011) Un estudi de laboratori sobre la propagació d'una espècie de mosques mostra que, passades  $t$  setmanes, el nombre d'individus és  $N(t)$  centenars de mosques, en què  $N(t) = -(t - 2)^2 + 9$ .

- Quantes mosques formen la població al cap d'una setmana? Quantes setmanes han de transcórrer fins a la desaparició total de les mosques?
- Quina és la població màxima d'individus? Quantes setmanes han hagut de passar per a obtenir aquesta població màxima?

56. (2011) Determineu dos nombres enters positius que sumin 25, de manera que el doble del quadrat del primer sumat amb el triple del quadrat del segon doni el mínim valor possible.

57. (2011) Sabem que la funció  $f(x) = ax^3 + 3x^2 - bx - \frac{1}{3}$  passa pel punt  $(1, 0)$ , i que la recta tangent a la gràfica de la funció en aquest punt és paral·lela a la recta  $12x - 2y = 3$ .

- Determineu els valors dels paràmetres  $a$  i  $b$ .
- Per  $a=1$  i  $b=9$ , determineu, si n'hi ha, les abscisses dels extrems possibles (màxims o mínims) de la funció, i classifiqueu-los.

58. (2010) Donada la funció següent:

$$f(x) = \frac{-4x^2}{x+1}$$

- Determineu-ne les asímptotes horitzontals i verticals, si n'hi ha.
- Trobeu els punts de la corba en què la recta tangent és paral·lela a la recta  $y = -3x + 4$ .

59. (2010) Considereu la funció  $f(x) = x \cdot e^{-x}$

- Indiqueu-ne els extrems relatius, si n'hi ha, i classifiqueu-los.
- Escriviu l'equació de la recta tangent a la corba en el punt d'abscissa 0.

60. (2010) En una explotació ramadera es declara una epidèmia, i els veterinaris preveuen que la propagació d'aquesta seguirà la funció  $f(x) = -2x^2 + 48x + 162$ , en què  $x$  representa el nombre de setmanes que

han transcorregut des del moment de la declaració de l'epidèmia, i  $f(x)$  indica el nombre d'animals afectats.

- a. Quants animals hi ha afectats en el moment de declarar-se l'epidèmia? Quantes setmanes durarà l'epidèmia fins al moment en què ja no quedi cap animal afectat?
- b. Indiqueu quin serà el nombre màxim d'animals afectats, i en quina setmana es produirà.

61. (2010) Volem construir el marc d'una finestra rectangular de  $100 \text{ dm}^2$  de superfície. El cost de cada decímetre de marc horitzontal és de 6 €, mentre que el de cada decímetre de marc vertical és de 24 €. Calculeu les dimensions de la finestra perquè el marc ens surti tan barat com sigui possible.

62. (2010) Donada la funció  $f(x) = x^2 \cdot e^x$ :

- a. Justifiqueu si hi ha cap valor de  $x$  que compleixi  $f(x) < 0$ . Hi ha cap valor de  $x$  que compleixi  $f(x) = 0$ ?
- b. Indiqueu si la funció  $f$  és creixent o decreixent en el punt  $x = -1$ . Estudieu el creixement de la funció  $f$  per als valors que compleixen  $x > 0$ .

63. (2010) Considereu la funció  $f(x) = x^3 - ax^2 + 9x + b$ .

- a. Determineu  $a$  i  $b$ , sabent que la gràfica de  $f$  passa pel punt  $(2, 2)$  i té un extrem en  $x = 1$ .
- b. Per  $a = 6$  i  $b = 0$ , determineu els possibles màxims i mínims de  $f$  i classifiqueu-los.

64. (2010) Un fons d'inversions posa en marxa un producte financer que aporta un benefici de  $R(x)$  euros en fer una inversió de  $x$  centenars d'euros, segons la funció  $R(x) = -0,01x^2 + 4x + 20$ .

- a. Calculeu quina inversió produeix més beneficis.
- b. Calculeu el tant per cent de benefici que s'obtindrà amb una inversió de 1 000 €, i el que s'obtindrà amb una de 10 000 €.